ЗАДАНИЯ

для проведения первого этапа республиканской олимпиады

по учебному предмету «Математика»

IX класс

**Задача 1.** Докажите, что в записи 20022 - 20012 -...- 22 - 12 можно некоторые минусы поменять на плюсы так, что значение получившегося выражения будет равно 2003.   
   
**Решение.**

Рассмотрим четыре идущих подряд числа и расставим в них знаки следующим образом:  
(*n*+3)2 - (*n*+2)2 - (*n*+1)2 + *n*2 = *n*2 + 6*n* + 9 - *n*2 - 4*n*- 4 - *n*2 - 2*n* - 1 + *n*2 = 4.  
Итак, любые четыре подряд идущих члена после указанной расстановки знаков могут дать в результате 4, поэтому первые 2000 членов, разбитые на четверки, дадут 500x4 = 2000. Оставшиеся два члена могут добавить к результату еще тройку: 22 - 1.

**Задание 2**. На окружности отмечены 2012 точек, делящих её на равные дуги.  
Из них выбрали k точек и построили выпуклый k-угольник с вершинами в выбранных точках.

**Решение:**  
При каком наибольшем k могло оказаться, что у этого многоугольника  
нет параллельных сторон?

Пусть  A1, A2, , A2012  – отмеченные точки в порядке обхода  
(будем считать, что  A2013 = A1,  A2014 = A2).  
Разобьём их на четвёрки  
(A1, A2, A1007, A1008),  (A3, A4, A1009, A1010),  ...,  (A1005, A1006, A2011, A2012).  
Если среди выбранных k точек встретятся все точки некоторой четвёрки  
(A2i–1, A2i, A2i+1005, A2i+1006), то в полученном многоугольнике найдутся две стороны A2i–1A2i и A2i+1005A2i+1006, которые симметричны относительно  
центра окружности и потому параллельны.  
Значит, в каждой из 503 четвёрок будет отмечено не более трёх вершин,  
то есть  k ≤ 503· 3 = 1509.  
Пример 1509-угольника без параллельных сторон с вершинами в отмеченных точках: A1A2...A1006A1008A1010... A2012  
(вершинами являются все точки с номерами от 1 до 1006 и все точки с чётными номерами от 2008 до 2012).  
Действительно, стороны A2012A1, A1A2, ..., A1005A1006 лежат по одну сторону от диаметра A2012A1006 и потому не параллельны; аналогично, стороны  
A1006A1008, ..., A2010A2012 попарно не параллельны.  
Наконец, малая диагональ AjAj+2 правильного 2012-угольника не параллельна его сторонам; значит, никакие две стороны вида AiAi+1 и AjAj+2 также не могут быть параллельными.  
Ответ: При  k = 1509.

**Задание 3**.  
По определению, n ! = 1 х 2 х 3 ? х............х n .  
Какой сомножитель нужно вычеркнуть из произведения 1! х 2! х 3! х ............х 20! , чтобы оставшееся произведение стало квадратом некоторого натурального числа?

**Решение:**

Заметим, что1! х 2! х 3! х 4! х.......х 20! = (1! х 2!) х (3! х 4!) х..........х (19! х 20!) = (1! х 1! х 2) х (3! х 3! х 4) х (5! х 5! х 6) х...........х (17! х 17! х 18) х (19! х 19! х 20) == (1!)2х (3!)2х (5!)2х............х (19!)2х (2 х 4 х 6 х 8 х...........х 18 х 20) =  
= (1!)2х (3!)2х (5!)2х.............х (19!)2?х (2 х (2 х 2) х (3 х 2) х..............х (10 х 2)) =  
= (1! х 3! х............х 19!)2х 210х (1 х 2 х 3 х...............х 2 х 10) = (1! х 3! х..............х 19!)2 (25)2х 10!  
Мы видим, что первые два множителя квадраты, поэтому, если вычеркнуть 10!, то останется квадрат.  
Легко видеть, что вычеркивание других множителей, указанных в ответах, не дает желаемого результата.  
Ответ: 10!

**Задание 4.**  
Три школьника сделали по два утверждения про натуральные числа a, b, c: Антон: 1) a + b + c = 34; 2) abc = 56;

Борис: 1) ab + bc + ac = 311 2) наименьшее из чисел равно 5;

Настя: 1) a = b = c 2) числа a, b и c — простые.

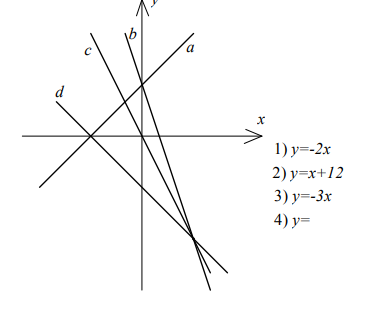
У каждого школьника одно утверждение верное, а другое — нет. Найдите числа a, b, c.

Ответ. 2, 13, 19 (в любом порядке).

**Решение:**  
У каждого школьника одно утверждение верное, а другое — нет. Найдите числа a, b, c. Решение. Если из утверждений Антона верно второе утверждение, то оба утверждения Насти неверны. Значит, a + b + c = 34. Таким образом, верно второе Настино утверждение. Так как сумма трёх простых чисел равна 34, они не могут все быть нечётными, и одно из них равно 2. Значит, из утверждений Бориса верно первое утверждение. Пусть для определённости a = 2. Тогда b + c = 32. Далее можно перебрать все пары простых чисел, дающие в сумме 32, и проверить для них равенство ab + bc + ac = 311. Но можно поступить так: 311 = ab + bc + ac = a(b + c) +bc = 64 + bc, откуда bc = 247. Так как 247 = 19⋅13, получаем что b = 13, c = 19 (или наоборот)

**Задача 5.**

Дима начертил графики четырёх линейных функций на координатной плоскости, но забыл отметить единичные отрезки. Когда он переписывал задание в тетрадь, то отвлекся и не дописал уравнения, задающие функции под номерами 3 и 4. Найдите эти уравнения. Ответ обоснуйте.



Ответ. 3) y = –3x + 12; 4) y = – x – 12.

**Решение:**

Из четырёх прямых только прямая а имеет положительный угловой коэффициент, следовательно, она задаётся уравнением 2 и пересекает оси координат в точках (0; 12) и (–12; 0). Так как уравнение 1 Дима записал полностью, его графиком является прямая, проходящая через начало координат, то есть прямая с. У прямой b модуль углового коэффициента больше, чем у прямой с, значит, начало уравнения прямой b Дима записал под номером 3. Так как эта прямая проходит через точку (0;12), она задаётся уравнением y = –3x + 12. Прямая d проходит через точку (–12;0) и через точку (12; –24) – точку пересечения прямых b и с, координаты которой легко находятся как решение системы линейных уравнений: y = –3x + 12 и y = –2x. Найдём уравнение прямой d. Для этого рассмотрим систему двух уравнений: 0 = –12k4 + b4; –24 = 12k4 + b4. Сложив эти уравнения, получим b4 = –12. Подставив в первое уравнение, получим k4 = –1.

**Критерии оценивания выполнения заданий**

|  |  |
| --- | --- |
| Баллы | Правильность (ошибочность) решения |
| 8 | Полное верное решение. |
| 6 - 7 | Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение. |
| 4 - 5 | Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений. |
| 2 - 3 | Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи. |
| 0 - 1 | Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении). |
| 0 | Решение неверное, продвижения отсутствуют. |
| 0 | Решение отсутствует. |